第 4 节 高考中椭圆常用的二级结论（★★★）

内容提要

解析几何中存在无数的二级结论，本节筛选出了一些在高考中比较常用的椭圆二级结论，记住这些结论可适当缩短解题时间.

1．焦点三角形面积公式：如图 1，设 P 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一点，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$ 分别是椭圆的左、右焦点，$\angle F_1PF_2=\theta$，则 $S_{\Delta PF_1F_2}=c|y_P|=b^2\tan\frac{\theta}{2}$.

证明：一方面，ΔPF_1F_2 的边 F_1F_2 上的高 $h=|y_P|$，所以 $S_{\Delta PF_1F_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot h=\frac{1}{2}\times 2c\times|y_P|=c|y_P|$；

另一方面，记 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，则由椭圆定义，$m+n=2a$ ①，

在 ΔPF_1F_2 中，由余弦定理，$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos\angle F_1PF_2$，

所以 $4c^2=m^2+n^2-2mn\cos\theta=(m+n)^2-2mn-2mn\cos\theta=(m+n)^2-2mn(1+\cos\theta)$ ②，

将式①代入式②可得：$4c^2=4a^2-2mn(1+\cos\theta)$，所以 $mn=\frac{4a^2-4c^2}{2(1+\cos\theta)}=\frac{2b^2}{1+\cos\theta}$，

故 $S_{\Delta PF_1F_2}=\frac{1}{2}mn\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{2b^2}{1+\cos\theta}\cdot\sin\theta=b^2\cdot\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

$=b^2\cdot\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=b^2\tan\frac{\theta}{2}$.

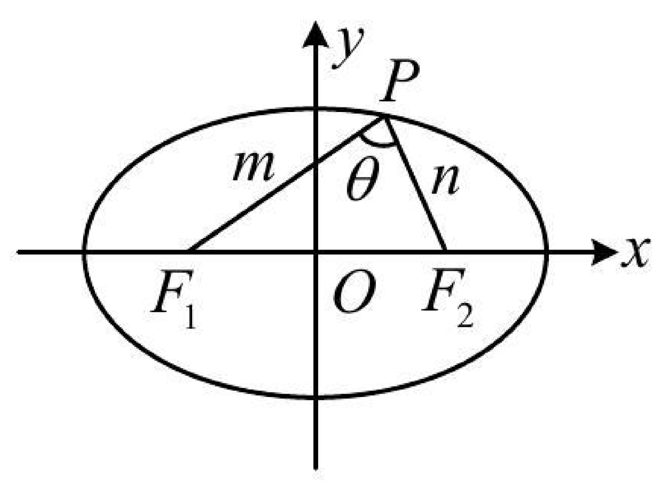


图1

2．焦半径公式：设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 $P(x_0,y_0)$ 为椭圆上任意一点，则左焦半径 $|PF_1|=a+ex_0$，右焦半径 $|PF_2|=a-ex_0$，其中 e 为椭圆的离心率.

证明：$F_1(-c,0)$，设 $P(x_0,y_0)$，则 $|PF_1|=\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}$ ①，

因为点 P 在椭圆上，所以 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，故 $y_0^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x_0^2$，代入①得：$|PF_1|=\sqrt{x_0^2+2cx_0+c^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x_0^2}$

$=\sqrt{(1-\frac{b^2}{a^2})x_0^2+2cx_0+a^2}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x_0^2+2cx_0+a^2}=\sqrt{(\frac{c}{a}x_0+a)^2}=\left|\frac{c}{a}x_0+a\right|=|a+ex_0|$，

因为 $0<e<1$，$-a\le x_0\le a$，所以 $a+ex_0>0$，故 $|PF_1|=a+ex_0$；同理可证 $|PF_2|=a-ex_0$.

3．基于椭圆第三定义的斜率积结论：如图 2，设 A，B 分别是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点，P 是椭圆上不与 A，B 重合的任意一点，则 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-\frac{b^2}{a^2}$.

注：上述结论中 A，B 是椭圆的左、右顶点，可将其推广为椭圆上关于原点对称的任意两点，如图 3，只要直线 PA，PB 的斜率都存在，就仍然满足 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-\frac{b^2}{a^2}$，下面给出证明.

证明：设 $A(x_1,y_1)$，$P(x_2,y_2)$，则 $B(-x_1,-y_1)$，所以 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}=\frac{y_2^2-y_1^2}{x_2^2-x_1^2}$ ①，

因为点 A 在椭圆上，所以 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$，故 $y_1^2=b^2(1-\frac{x_1^2}{a^2})=-\frac{b^2}{a^2}(x_1^2-a^2)$，同理 $y_2^2=-\frac{b^2}{a^2}(x_2^2-a^2)$，

所以 $y_2^2-y_1^2=-\frac{b^2}{a^2}(x_2^2-a^2-x_1^2+a^2)=-\frac{b^2}{a^2}(x_2^2-x_1^2)$，代入①得：$k_{PA}\cdot k_{PB}=-\frac{b^2}{a^2}$；

在上述条件中令 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，即得内容提要第 3 点的特殊情况下的结论.

4．中点弦斜率积结论：如图 4，AB 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一条不与坐标轴垂直且不过原点的弦，M 为 AB 中点，则 $k_{AB}\cdot k_{OM}=-\frac{b^2}{a^2}$，此结论可用下面的点差法来证明.

证明：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$x_1\neq x_2$，$y_1\neq y_2$，因为 A、B 都在椭圆上，所以 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1\\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$，

两式作差得：$\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}+\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$，整理得：$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\frac{b^2}{a^2}$ ①，

注意到 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k_{AB}$，$\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{2y_M}{2x_M}=\frac{y_M}{x_M}=k_{OM}$，所以式①即为 $k_{AB}\cdot k_{OM}=-\frac{b^2}{a^2}$.

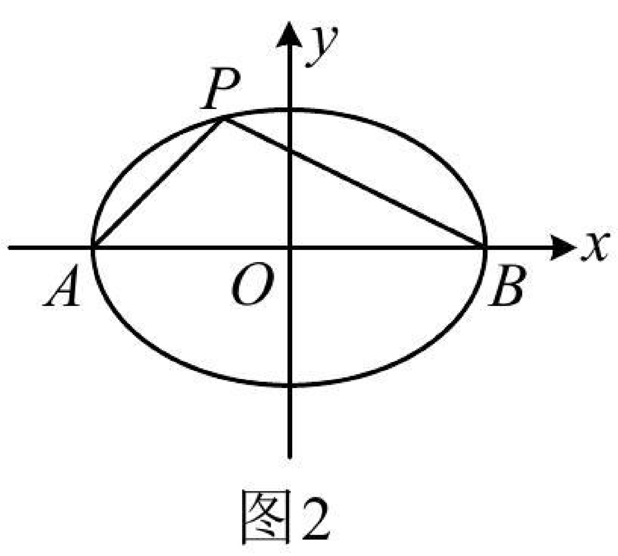


图2

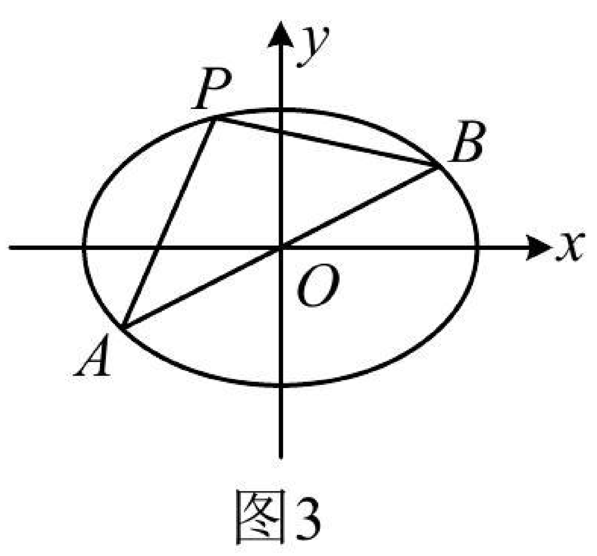


图3

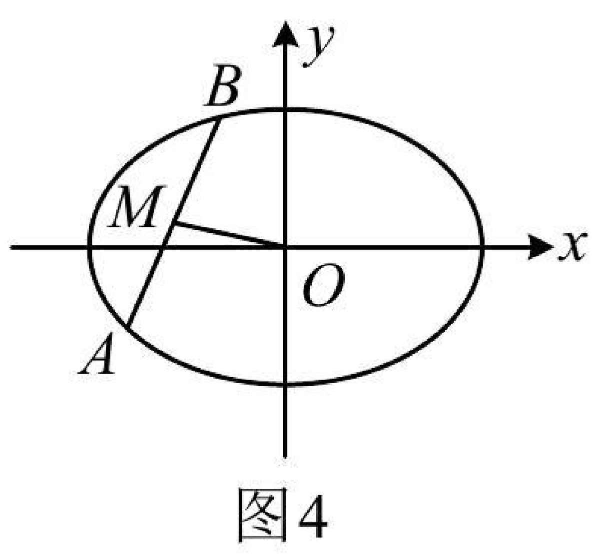


图4

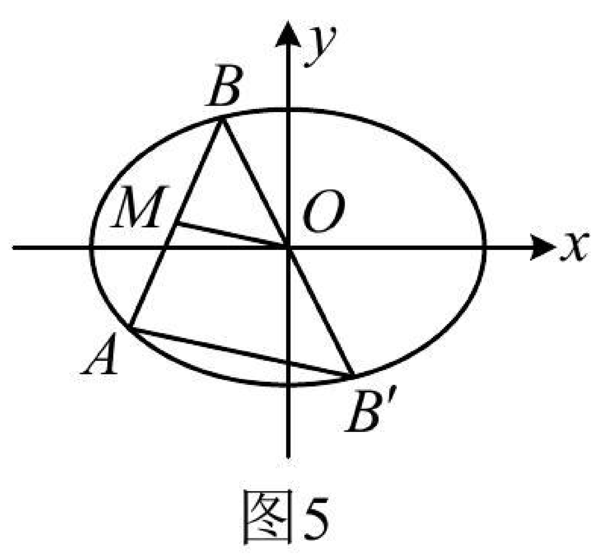


图5

注：中点弦结论和上面的第三定义斜率积结论的结果都是 $-\frac{b^2}{a^2}$，这是巧合吗？不是，两者之间有必然的联系. 如上面图 5，设 B' 为 B 关于原点的对称点，则 B' 也在该椭圆上，且 O 为 BB' 中点，结合 M 为 AB 中点可得 $OM/\!/AB'$，所以 $k_{AB}\cdot k_{OM}=k_{AB}\cdot k_{AB'}$，于是又回到了椭圆上的点 A 与椭圆上关于原点对称的 B 和 B' 的连线的斜率积.

典型例题

类型Ⅰ：焦点三角形面积

【例 1】设 F_1，F_2 是椭圆 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(0<b<2\sqrt{2})$ 的两个焦点，点 P 在椭圆上，$\angle F_1PF_2=60^{\circ}$，且 ΔF_1PF_2 的面积为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，则 $b=$_____.

解析：给出 $\angle F_1PF_2$，直接代公式 $S=b^2\tan\dfrac{\theta}{2}$ 算焦点三角形面积，

因为 $\angle F_1PF_2=60^{\circ}$，所以 $S_{\Delta F_1PF_2}=b^2\tan 30^{\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}b^2$，由题意，$S_{\Delta F_1PF_2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，所以 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}b^2=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，故 $b=2$.

答案：2

【变式】(2023 •全国甲卷)椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{6}=1$ 的两焦点为 F_1，F_2，O 为原点，P 为椭圆上一点，$\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{3}{5}$，则 $|OP|=$（　　）

（A）$\dfrac{2}{5}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{30}}{2}$　　（C）$\dfrac{3}{5}$　　（D）$\dfrac{\sqrt{35}}{2}$

解析：由题意，$a=3$，$b=\sqrt{6}$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$，

如图，已知 $\angle F_1PF_2$，可由焦点三角形面积公式求 $S_{\Delta PF_1F_2}$，而 $S_{\Delta PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|F_1F_2|\cdot y_P$，故可建立方程求 y_P，

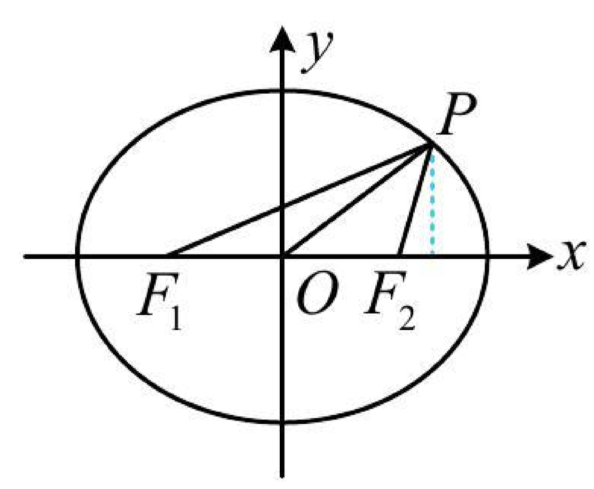
记 $\angle F_1PF_2=\theta$，则由题意，$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，又 $\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1$，所以 $2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1=\dfrac{3}{5}$，

结合 $\dfrac{\theta}{2}$ 为锐角可得 $\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，故 $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2}$，所以 $S_{\Delta PF_1F_2}=b^2\tan\dfrac{\theta}{2}=3$，

又 $S_{\Delta PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_P|=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}|y_P|=\sqrt{3}|y_P|$，所以 $\sqrt{3}|y_P|=3$，故 $|y_P|=\sqrt{3}$，

代入椭圆方程可求得 $|x_P|=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，所以 $|OP|=\sqrt{x_P^2+y_P^2}=\dfrac{\sqrt{30}}{2}$.

答案：B



【反思】从上面两道题可以看出，当题干给出 $\angle F_1PF_2$ 时，可用 $S_{\Delta PF_1F_2}=b^2\tan\dfrac{\theta}{2}$（其中 $\theta=\angle F_1PF_2$）来算焦点三角形的面积；由 $S_{\Delta PF_1F_2}=c|y_P|=b^2\tan\dfrac{\theta}{2}$ 还可以建立顶角 θ 和 $|y_P|$ 之间的等量关系.

类型 II：焦半径公式

【例 2】椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，椭圆上的一点 P 满足 $|PF_1|=3|PF_2|$，若 P 在第一象限，则点 P 的坐标为_____.

解析：条件涉及焦半径 $|PF_1|$ 和 $|PF_2|$，要求坐标，可用焦半径公式，由题意，$a=\sqrt{6}$，$c=2$，$e=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

设 $P(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$，则由焦半径公式，$|PF_1|=\sqrt{6}+\frac{\sqrt{6}}{3}x_0$，$|PF_2|=\sqrt{6}-\frac{\sqrt{6}}{3}x_0$，

因为 $|PF_1|=3|PF_2|$，所以 $\sqrt{6}+\frac{\sqrt{6}}{3}x_0=3(\sqrt{6}-\frac{\sqrt{6}}{3}x_0)$，解得：$x_0=\frac{3}{2}$，

代入椭圆方程结合 $y_0>0$ 可解得：$y_0=\frac{\sqrt{5}}{2}$，故点 P 的坐标为 $(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{5}}{2})$.

答案：$(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{5}}{2})$

【变式】（2019·新课标III卷）设 F_1，F_2 为椭圆 $C:\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ 的两个焦点，M 为 C 上一点且在第一象限，若 ΔMF_1F_2 为等腰三角形，则 M 的坐标为_____.

解法 1：由题意，$a=6$，$b=2\sqrt{5}$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=4$，椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$，

题干给出 ΔMF_1F_2 为等腰三角形，应先判断谁是底，谁是腰，可通过比较三边的长来判断，

如图，点 M 在第一象限 $\Rightarrow |MF_1|>|MF_2|$，又 $|MF_1|+|MF_2|=2a=12$，所以 $|MF_2|<6$，

而 $|F_1F_2|=2c=8$，所以 $|MF_2|<|F_1F_2|$，故只能 $|MF_1|=|F_1F_2|=8$，

涉及焦半径 $|MF_1|$，可用焦半径公式来求 M 的坐标，

设 $M(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$，由焦半径公式，$|MF_1|=6+\frac{2}{3}x_0=8$，所以 $x_0=3$，

又点 M 在椭圆 C 上，所以 $\frac{x_0^2}{36}+\frac{y_0^2}{20}=1$，结合 $\begin{cases}x_0=3\\y_0>0\end{cases}$ 可得：$y_0=\sqrt{15}$，故 $M(3,\sqrt{15})$.

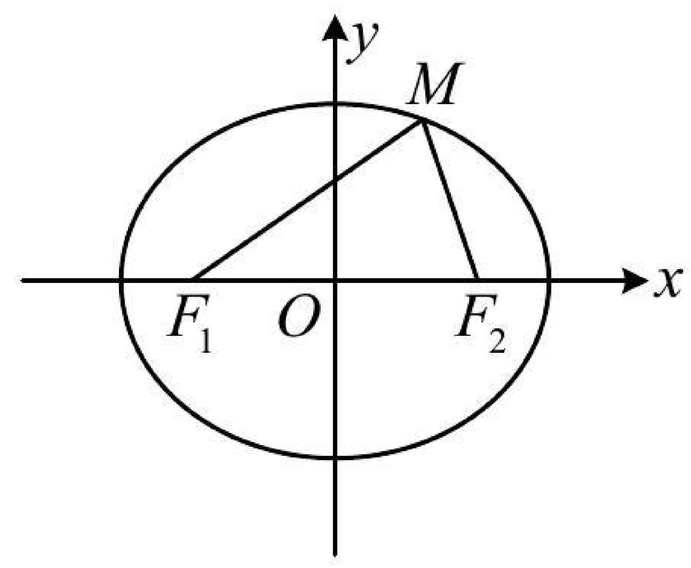
解法 2：得出 $|MF_1|=|F_1F_2|=8$ 的过程同解法 1，接下来也可用两点间距离来翻译 $|MF_1|=8$，

由题意，$F_1(-4,0)$，设 $M(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$，则 $|MF_1|=\sqrt{(x_0+4)^2+y_0^2}=8$ ①，

还差一个方程，可把点 M 代入椭圆方程来建立，因为 M 在椭圆 C 上，所以 $\frac{x_0^2}{36}+\frac{y_0^2}{20}=1$ ②，

联立①②，结合 $\begin{cases}x_0>0\\y_0>0\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}x_0=3\\y_0=\sqrt{15}\end{cases}$，故 $M(3,\sqrt{15})$.

答案：$(3,\sqrt{15})$



类型III：第三定义、中点弦斜率积结论

【例 3】已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦距为 4，左、右顶点分别为 A 和 B，P 是椭圆上不与 A，B 重合的一点，若直线 PA，PB 的斜率之积为$-\dfrac{1}{2}$，则椭圆 C 的方程为_____.

解析：椭圆 C 的焦距为$4\Rightarrow 2\sqrt{a^2-b^2}=4\Rightarrow\sqrt{a^2-b^2}=2$ ①，

再建立一个关于 a，b 的方程，就可求出 a 和 b，条件中有斜率之积，联想到椭圆第三定义斜率积结论，

由题意，$k_{PA}k_{PB}=-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{1}{2}$ ②，联立①②可求得：$a^2=8$，$b^2=4$，所以椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

答案：$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$

【变式 1】已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，点 A，B 为长轴的两个端点，若在椭圆上存在点 P 使直线 AP 和 BP 的斜率之积$k_{AP}\cdot k_{BP}\in(-\dfrac{1}{3},0)$，则椭圆 C 的离心率 e 的取值范围是_____.

解析：看到$k_{AP}\cdot k_{BP}$，想到第三定义斜率积结论，由题意，$-\dfrac{1}{3}<k_{AP}\cdot k_{BP}=-\dfrac{b^2}{a^2}<0$，所以$\dfrac{b^2}{a^2}<\dfrac{1}{3}$，

从而$a^2>3b^2=3(a^2-c^2)$，故$\dfrac{c^2}{a^2}>\dfrac{2}{3}$，所以$e=\dfrac{c}{a}>\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，又$0<e<1$，所以$\dfrac{\sqrt{6}}{3}<e<1$.

答案：$(\dfrac{\sqrt{6}}{3},1)$

【反思】椭圆中涉及两直线的斜率积，可考虑用第三定义斜率积结论.

【变式 2】（2022·全国甲卷）椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左顶点为 A，点 P，Q 均在 C 上，且关于 y 轴对称，若直线 AP，AQ 的斜率之积为$\dfrac{1}{4}$，则 C 的离心率为（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　（B）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　（C）$\dfrac{1}{2}$　（D）$\dfrac{1}{3}$

解法 1：条件涉及斜率积，可尝试用第三定义斜率积结论，如图，P，Q 关于 y 轴对称，不能直接用结论，但只需作其中一个关于 x 轴的对称点，就可产生关于原点对称的两点，

设点 Q 关于 x 轴的对称点为Q'，则 P，Q' 关于原点对称，且$k_{AQ'}=-k_{AQ}$ ①，

由椭圆第三定义斜率积结论的推广知 $k_{AP}\cdot k_{AQ'}=-\dfrac{b^2}{a^2}$，

将式①代入得：$k_{AP}\cdot(-k_{AQ})=-\dfrac{b^2}{a^2}$，故 $k_{AP}\cdot k_{AQ}=\dfrac{b^2}{a^2}$，又 $k_{AP}\cdot k_{AQ}=\dfrac{1}{4}$，所以 $\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{1}{4}$，

故 $a^2=4b^2=4(a^2-c^2)$，整理得：$\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{3}{4}$，所以椭圆 C 的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

解法 2：也可直接设点的坐标来算 AP，AQ 的斜率积，

设 $P(x_0,y_0)$，则 $Q(-x_0,y_0)$，由题意，$A(-a,0)$，所以 $k_{AP}\cdot k_{AQ}=\dfrac{y_0}{x_0+a}\cdot\dfrac{y_0}{-x_0+a}=\dfrac{y_0^2}{a^2-x_0^2}$ ①，

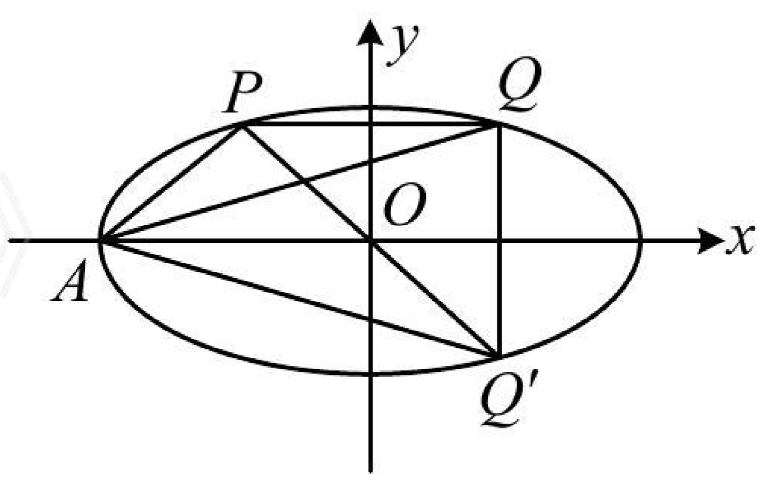
有 x_0，y_0 两个变量，可用椭圆方程消元，

因为点 P 在椭圆 C 上，所以 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$，

故 $y_0^2=b^2(1-\dfrac{x_0^2}{a^2})=\dfrac{b^2}{a^2}(a^2-x_0^2)$，

代入①得：$k_{AP}\cdot k_{AQ}=\dfrac{b^2}{a^2}$，接下来同解法 1.

答案：A

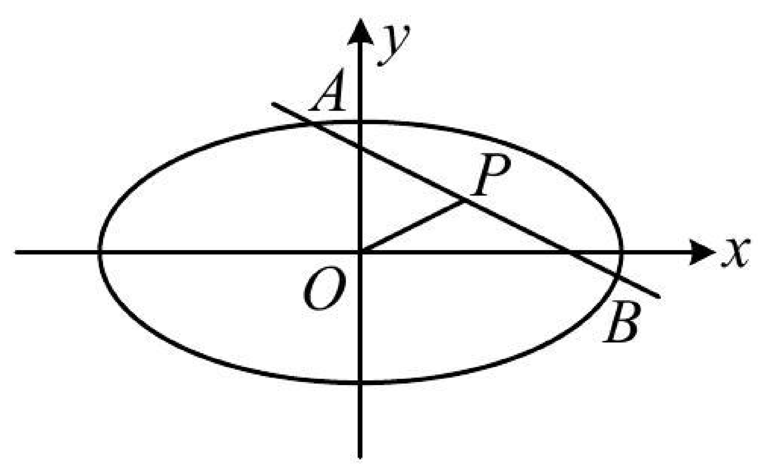


【例 4】已知直线 $y=-\dfrac{1}{2}x+2$ 与椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 交于 A，B 两点，线段 AB 的中点为 $P(2,1)$，则椭圆 C 的离心率为_____.

解析：条件中涉及椭圆的弦中点，想到中点弦斜率积结论，如图，$k_{OP}\cdot k_{AB}=\dfrac{1}{2}\times(-\dfrac{1}{2})=-\dfrac{b^2}{a^2}$，

所以 $a^2=4b^2=4(a^2-c^2)$，整理得：$\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{3}{4}$，故椭圆 C 的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

答案：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



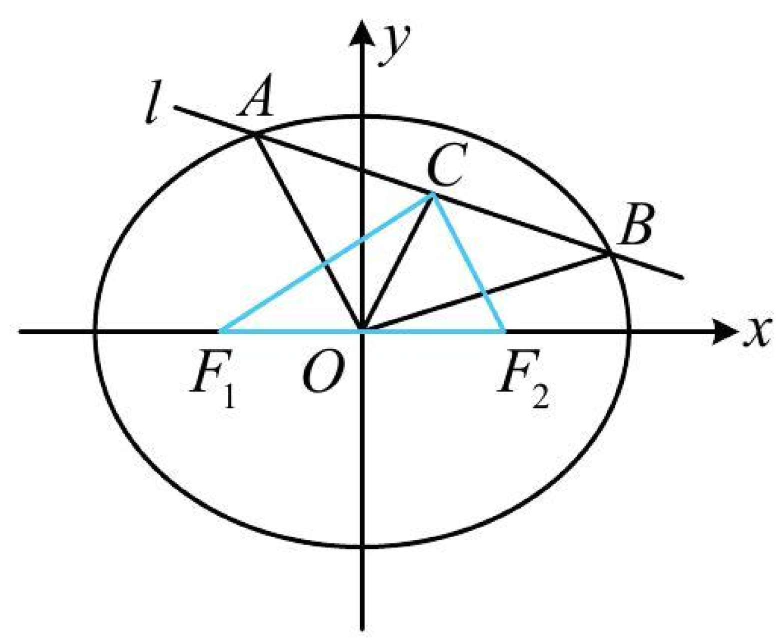
【变式】直线$l:x+3y-7=0$与椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(0<b<3)$相交于$A,B$两点，椭圆的两个焦点分别为$F_1$，$F_2$，线段$AB$的中点为$C(1,2)$，则$\Delta CF_1F_2$的面积为_____.

解析：椭圆中涉及弦中点，想到中点弦斜率积结论，如图，$k_{OC}\cdot k_{AB}=-\dfrac{b^2}{9}$ ①，

$C(1,2)\Rightarrow k_{OC}=2$，$x+3y-7=0\Rightarrow y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{7}{3}\Rightarrow k_{AB}=-\dfrac{1}{3}$，代入①可得$2\times(-\dfrac{1}{3})=-\dfrac{b^2}{9}$，

所以$b^2=6$，从而$c=\sqrt{9-b^2}=\sqrt{3}$，故$S_{\Delta CF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_C|=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2=2\sqrt{3}$.

答案：$2\sqrt{3}$



【反思】在椭圆中，涉及弦中点的问题都可以考虑用中点弦斜率积结论来建立方程，求解需要的量.

强化训练

1．（2023•北京丰台模拟•★）已知椭圆$C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的左、右两个顶点分别为$A$，$B$，点$P$是椭圆$C$上异于$A$，$B$的任意一点，则直线$PA$，$PB$的斜率之积为_____.

2．（2023•甘肃武威模拟•★★）若椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$的焦点为$F_1$，$F_2$，点$P$在椭圆上，且$\angle F_1PF_2=90^{\circ}$，则$\Delta PF_1F_2$的面积为（　　）

（A）9　（B）12　（C）15　（D）18

3．（★★）椭圆$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，点$P$在椭圆上，则$|PF_1|\cdot|PF_2|$的取值范围为_____.

4．（★★★）设F_1，F_2是椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$的左、右焦点，$P$是椭圆在第一象限上的一点，且$\angle F_1PF_2=60^{\circ}$，则点$P$的坐标为_____.

5．（2022•全国模拟•★★★）已知P是椭圆$C:\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$在第一象限上的动点，$F_1$，$F_2$分别是其左、右焦点，$O$是坐标原点，则$\frac{|OP|}{|PF_1|-|PF_2|}$的取值范围是_____.

6．（2022 • 广西模拟 • ★★）已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为 F，过 F 作倾斜角为45°的直线与椭圆 C 交于 A，B 两点，若点$M(-3,2)$是线段 AB 的中点，则椭圆 C 的离心率是（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　（B）$\dfrac{1}{2}$　（C）$\dfrac{2}{5}$　（D）$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

7．（2023 • 黑龙江哈尔滨模拟 • ★★）阿基米德是古希腊著名的数学家、物理学家，他利用“逼近法”得到椭圆的面积除以圆周率 π 等于椭圆的长半轴长与短半轴长的乘积. 已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F(3,0)$，过 F 作直线 l 交椭圆于 A，B 两点，若弦 AB 的中点为$M(2,-1)$，则椭圆的面积为（　　）

（A）$36\sqrt{2}\pi$　（B）$18\sqrt{2}\pi$　（C）$9\sqrt{2}\pi$　（D）$6\sqrt{2}\pi$

8.（2023 •重庆模拟 •★★★）已知点$A(-5,0)$，$B(5,0)$，动点$P(m,n)$满足直线 PA，PB 的斜率之积为$-\dfrac{16}{25}$，则$4m^2+n^2$的取值范围是（　　）

（A）$[16,100]$　（B）$[25,100]$　（C）$[16,100)$　（D）$(25,100)$